ΟΡΙΣΜΟΣ 105

Εστω $f: V \to V$ γραμμική και W υπόχωρος του V. Ο W λέγεται f αναλλοίωτος αν $f(W) \subseteq W$. Τότε ορίζεται η γραμμική απεικόνιση $f/_W : W \to W$

ΠΡΟΤΑΣΗ 106 α.

Αν $f: V \to V$ γραμμική, τότε οι υπόχωροι $\ker f = \{w \in V : f(w) = 0_V\}$ και $\operatorname{Im} f = \{f(w) : w \in V\}$ είναι f αναλλοίωτοι

ΑΠΟΔ. Για το $\ker f$. Εστω $w \in \ker f$. Τότε $f(w) = 0_V$. Αφού $f(0_V) = 0_V$, αφού f γραμμική έχουμε ότι $f(w) \in \ker f$. Επομένως, $\ker f$ είναι αναλλοίωτος

Εστω $z \in \operatorname{Im} f$, θέλουμε ν.δ.ο $f(z) \in \operatorname{Im} f$ που είναι προφανές. Επομένως, $\operatorname{Im} f$ είναι αναλλοίωτη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 106 b.

Εστω $f: V \to V$ γραμμική και $w \in V$ με $w \neq 0_V$. Τότε ο 1-διάστατος υπόχωρος $W = \langle w \rangle$ είναι f αναλλοίωτος αν και μόνο αν το w είναι ιδιοδιάνυσμα της f.

ΑΠΟΔ: Αμεση απ' τους ορισμούς, γιατί $\langle w \rangle$ f αναλλοίωτο αν και μόνο αν $\exists \lambda \in \mathbb{F}$ με $f(w) = \lambda w$, το οποίο είναι ισοδύναμο με w ιδιοδιάνυσμα της f.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 107

Εστω $A \in \mathbb{F}^{\nu \times \nu}$ και $X_A(x) = (-1)^\nu x^\nu + b_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + b_1 x + b_0$ με $b_0 \in \mathbb{F}$. Απο ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 84
$\det A = X_A(0) = b_0$. Επομένως, A αντιστρέψιμος $\iff b_0 \neq 0_{\mathbb{F}}$. Υποθέτουμε τώρα $b_i \neq 0_{\mathbb{F}}$
Απο Θ. Cayley-Hamilton $X_A(A) = \mathbb{O}_{\nu\times\nu} \implies (-1)^\nu A^\nu + b_{\nu-1} A^{\nu-1} + \dots + b_1 A = -b_0 I_\nu$

$$\implies \begin{cases} AC = I_\nu \\ CA = I_\nu \end{cases}, \text{ όπου } \boxed{C = -\frac{(-1)^\nu}{b_0} A^{\nu-1} - \frac{b_{\nu-1}}{b_0} A^{\nu-1} - \dots - \frac{b_1}{b_0} I_\nu. \ (*)}$$

Αρα $A^{-1} = C$. Συμπέρασμα ο A^{-1} είναι συγκεκριμένο πολυώνυμο του A που δίνεται από την $(*)$

Για το ερώτημα πότε 2 τετραγωνικοί πίνακες $\nu \times \nu$ είναι όμοιοι ή όχι η απάντηση δίνεται από κανονική μορφή Jordan στοιχειώδους διαιρέτες και ρητή κανονική μορφή (ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ)

ΘΕΩΡΗΜΑ (αυτό)

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{v\times v}$. Οι A, B είναι όμοιοι αν και μόνο αν για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$
βαθμίδα$[(A-\lambda I_v)^i]$ = βαθμίδα$[(B-\lambda I_v)^i]$ για κάθε $1 \le i \le v$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 108

Έστω V δ.χ. χώρος επί του σώματος $\mathbb{F}$.

(i) Μια απεικόνιση $\varphi: V\times V \to \mathbb{F}$ λέγεται ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΗ αν

$$\left.\begin{aligned} \varphi(v, w+z) &= \varphi(v,w)+\varphi(v,z) \\ \varphi(v, \lambda w) &= \lambda\varphi(v,w) \\ \varphi(v+w, z) &= \varphi(v,z)+\varphi(w,z) \\ \varphi(\lambda v, w) &= \lambda\varphi(v,w) \end{aligned}\right\}$$ για κάθε $v, w, z \in V$ και $\lambda \in \mathbb{F}$

(ii) Η $\varphi: V\times V \to \mathbb{F}$ λέγεται ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ αν $\varphi(v,w) = \varphi(w,v)$ για κάθε $v, w \in V$

(διγραμμική: Αν σταθεροποιήσουμε την μία από τις δύο συντεταγμένες, είναι γραμμική απεικόνιση ως προς την άλλη συντεταγμένη, δηλαδή για κάθε $v \in V$, η απεικόνιση $V \to \mathbb{F}$ $z \mapsto \varphi(v,z)$ είναι γραμμική και το ίδιο ισχύει και για την απεικόνιση $V \to \mathbb{F}$, $z \mapsto \varphi(z,w)$)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(i) Η $\varphi: \mathbb{F}^2\times\mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}$ με $\varphi((a,b),(c,d)) = ad+bc$ είναι συμμετρική και διγραμμική. Συμμετρική $\varphi((a,b),(c,d)) = ad+bc$

$$\varphi((c,d),(a,b)) = cb+da$$
$$= \varphi((a,b),(c,d))$$

Διγραμμική εύκολη επαλήθευση, π.χ. $\varphi((a,b),(c,d)+(c',d')) = \varphi((a,b),(c+c',d+d'))$

$$= a(d+d')+b(c+c')$$
$$= (ad+bc)+(ad'+bc')$$
$$= \varphi((a,b),(c,d))+\varphi((a,b),(c',d'))$$

Ομοίως αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες

(i) η $\varphi: \mathbb{F}^2\times\mathbb{F}^2 \to \mathbb{F}$ με $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1+5x_2y_1$ είναι διγραμμική (εύκολη επαλήθευση). Δεν είναι συμμετρική γιατί π.χ. $\varphi((1,0),(0,1)) = 1$ ενώ $\varphi((0,1),(1,0)) = 5$

ΟΡΙΣΜΟΣ 110

Εστω V διαν χώρος επί του σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και $\varphi: V\times V \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Η φ λέγεται <u>ΘΕΤΙΚΑ ΟΡΙΣΜΕΝΗ</u> αν $\varphi(v,v) \geq 0_{\mathbb{R}}$ για κάθε $v\in V$ και $\varphi(v,v) = 0_{\mathbb{R}}$ αν και μόνο αν $v = 0_V$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 111

(i) Εστω $\varphi: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + 2015x_2y_2$. Εχουμε για $v=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ $\varphi(v,v) = \varphi((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = x^2 + 2015x_2^2$ Αρα $\varphi(v,v) \geq 0$ για κάθε $v\in V$ και $\varphi(v,v) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow$ $x_1^2 + 2015x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0_{\mathbb{R}^2}, x_2 = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow v = 0_{\mathbb{R}^2}$ Επομένως φ θετικά ορισμένη.

(ii) $\varphi: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - 5x_2y_2$ δεν είναι θετικά ορισμένη γιατί $\varphi((1,0),(0,1)) = -5 < 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ 112

Εστω V διαν χώρος επί του $\mathbb{R}$ και $\varphi: V\times V \to \mathbb{R}$ μία απεικόνιση. Η φ λέγεται ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ στο V αν είναι διγραμμική, συμμετρική και θετικά ορισμένη. Τότε συνήθως γράφουμε $\langle\ ,\ \rangle$ αντί για φ και $\langle v,w\rangle$ αντί για $\varphi(v,w)$ και λέμε $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ ΧΩΡΟΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 113 a

Θεωρούμε την συνάρτηση $\langle\ ,\ \rangle: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\langle(a_1,a_2,\dots,a_n),(b_1,b_2,\dots,b_n)\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ Εύκολα βλέπουμε ότι $\langle\ ,\ \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$, που λέγεται ΚΑΝΟΝΙΚΟ ή ΣΥΝΗΘΕΣ εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$.

(Για το θετικά ορισμένο, για $v=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ έχουμε $\langle v,v\rangle = a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq 0_{\mathbb{R}}$ και $\langle v,v\rangle = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow v = 0_{\mathbb{R}^n}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 113 b

Εστω $A\in\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$ με $A=(a_{ij})$. Ορίζουμε ίχνος $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{\nu\nu} \in \mathbb{F}$

π.χ $Tr\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\right) = 2+7 = 9$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ c

Εστω $V = \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$. Ορίζουμε $\langle\ ,\ \rangle: V\times V \to \mathbb{R}$ $\langle A,B\rangle = Tr(B^t A)$. Ισχυριζόμαστε ότι $\langle\ ,\ \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στο V.

Η συμμετρία $\langle A,B\rangle = \langle B,A\rangle$ προκύπτει από ... $Tr(...) = Tr(...)$ ... είδαμε στην Πρ. I

Η διγραμμικότητα προκύπτει απ'την εύκολη ιδιότητα $Tr(C+D) = Tr(C) + Tr(D)$

Έστω $A = (a_{ij})$ θα δείξουμε $tr(A^t A) \geq 0$ και $Tr(A^t A) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow A = \mathbb{O}_{\nu \times \nu} = 0$

Θέτουμε $B = A^t A = (b_{ij})$. Για το b_{11} έχουμε $\begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{\nu 1} \\ * \\ \ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \\ a_{21} & * \\ \vdots & \\ a_{\nu 1} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + \dots + a_{\nu 1}^2 & * \\ * & * \end{bmatrix}$

άρα $b_{11} = a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots a_{\nu 1}^2$ Ομοίως βλέπω $b_{jj} = a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \dots + a_{\nu j}^2$

Άρα $\langle A, A \rangle = tr(A^t A) = tr(B) = b_{11} + b_{22} + \dots + b_{\nu\nu} = \sum a_{ij}^2 =$ (άθροισμα των ~~τετρ~~ τετραγώνων όλων των στοιχείων του A) $1 \leq i, j \leq \nu$ Σαν άσκηση,

$\langle A, A \rangle \geq 0_{\mathbb{R}}$ και $\langle A, A \rangle = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow A = \mathbb{O}_{\nu \times \nu}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 113 d

Έστω $V = \mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}\}$ Ο διαν. χώρος των πολυωνύμων βαθμού $\leq n$, με συντελεστές στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ με $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$. Εύκολα βλέπουμε ότι $\langle \ , \ \rangle$ είναι ~~εσωτ~~ εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}_n[x]$. Πιο γενικά, αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ η απεικόνιση $\langle \ , \ \rangle$ $V \times V \to \mathbb{R}$ με $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ είναι εσωτερικό γινόμενο στο V